総合職試験・一般職試験(大卒程度試験)・
障害者(係員級)採用試験(大卒程度試験)共通　数学

以下の4つの問題のうちから3つを選択して, 解答用紙に解答を記入せよ. なお解答に当たっては, 考え方や途中の計算などもなるべく詳しく記し, 何らかの定理を用いた場合は, その名前や内容も明記すること.

以下, $\mathbb{Z}$ を整数全体の集合, $\mathbb{R}$ を実数全体の集合とする.

問 1 $A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 10 & -6 & -5 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) A の固有値を求めよ. さらにその固有ベクトルをそれぞれ一つ求めよ.

(2) 3×3 型正則行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列となるものを一つ求めよ.

(3) $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ に対して $A^{2025}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$ となる解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ は存在するかどうか答えよ.

問 2 $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (-1 \leq x \leq 1) \\ 0 & (x < -1, 1 < x) \end{cases}$$

とおく. このとき

$$f_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)dy,$$
$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f_{n-1}(y)dy \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

と定める.

(1) x が次の範囲にあるとき, $f_0(x)$ を求めよ.

(i) $|x| \geq 2$　　(ii) $-2 \leq x \leq 0$　　(iii) $0 \leq x \leq 2$

(2) f_n は $\mathbb{R}$ 上の C^n 級関数となることを示せ.

(3) $\frac{d^4 f_4}{dx^4}(1)$ を求めよ.

問 3 集合 M の部分集合 $A, B \subset M$ に対して $A\Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$ と定める. ただし, $A^c, B^c \subset M$ はそれぞれ M における A, B の補集合である.

(1) $M = \{m \in \mathbb{Z} \,|\, 1 \leq m \leq 100\}$, $A = \{m \in M \,|\, m$ は 2 の倍数$\}$, $B = \{m \in M \,|\, m$ は 3 の倍数$\}$ のとき, $A\Delta B$ の要素の個数を求めよ.

(2) 一般に, 集合 M とその部分集合 $A, B, C \subset M$ に対して

$$A\Delta C \subset (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$$

が成り立つことを証明せよ. ただし証明ではベン図などの図は用いないこと.

(3) 部分集合 $A, B \subset M$ に対して,

$$A\Delta C = B$$

となる $C \subset M$ が存在することを証明せよ. ただし証明ではベン図などの図は用いないこと.

問 4

(1) $\lambda > 0$ として, ポアソン分布 $P_\lambda(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ について考える.

(i) ポアソン分布 $P_\lambda(k)$ の平均を求めよ.

(ii) ポアソン分布 $P_\lambda(k)$ の分散を求めよ. 必要であれば等式

$$\lambda e^\lambda + e^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{\lambda^k}{k!}$$

を証明なしで使ってよい.

(2) ある会社で, 1 時間にかかってくる電話の回数は平均 2 のポアソン分布に従うとする.

(i) 1 時間に 3 回以上電話がかかってくる確率を求めよ. ただし計算を簡単にするため, $e = \frac{11}{4}$ として計算せよ.

(ii) この会社では 1 時間に届くメールの回数は平均 8 のポアソン分布に従うとする. 1 時間にかかってくる電話と届くメールの合計回数は, 平均 10 のポアソン分布に従うことを示せ. ただし, 電話とメールの回数はそれぞれ独立であるとする.