## 総合職試験 物理学

**問題 5**

アインシュタインの特殊相対性理論では，時間 $t$ と空間座標 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ を併せて 4 成分のベクトル $(ct,x,y,z)$ とみなす．ただし，$c$ は光速度である．以下の問に答えよ．

(1) 光速で伝播する波を考え，空間座標 $\boldsymbol{r}$，時間 $t$ における波の振幅を $f(\boldsymbol{r},t)$ とすると，次式が成り立つ．

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)f(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{i}$$

$z$ 軸方向に伝播する波を考え，式 (i) が光速 $c$ で伝播する波の解を持つことを説明せよ．

スカラーポテンシャルを $\phi$，電荷密度を $\rho$，真空の誘電率を $\varepsilon_0$ とすると，$\phi$ および $\rho$ が時間に依存しない場合，次式が成り立つ．

$$\nabla^2\phi=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{ii}$$

時間 $t$ と空間座標 $\boldsymbol{r}$ を併せて 4 成分のベクトルとみなしたように，スカラーポテンシャル $\phi$ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を併せて 4 成分のベクトル $(\phi,c\boldsymbol{A})$ とみなせる．また，電荷 $\rho$ と電流密度 $\boldsymbol{j}$ を併せて 4 成分のベクトル $\left(\rho,\frac{1}{c}\boldsymbol{j}\right)$ とみなす．さらに，$\nabla^2$ を $\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ に置き換えると，これら 4 成分のベクトル間に成り立つ方程式は，式 (ii) に対応して

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{iii}$$

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)c\boldsymbol{A}=-\frac{1}{\varepsilon_0 c}\boldsymbol{j} \tag{iv}$$

となる．

(2) ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ と磁束密度の関係，およびマクスウェル方程式から，一般に電場 $\boldsymbol{E}$ が $\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\partial_t\boldsymbol{A}$ と書けることを説明せよ．

(3) 次の式が成り立つことを示せ．

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=-\nabla^2\boldsymbol{A}+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) \tag{v}$$

(4) $\boldsymbol{A}$ と $\phi$ には不定性があり，ゲージ変換の自由度とよぶ．この不定性について説明せよ．

(5) ゲージ変換の自由度を固定する条件として $\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$ を課すと，磁場を $\boldsymbol{H}$，電束密度ベクトルを $\boldsymbol{D}$ として，式 (iv) から次式が得られることを示せ．

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{vi}$$