総合職試験・一般職試験(大卒程度試験)・
障害者(係員級)採用試験(大卒程度試験)共通　物理学

問題1〜問題4の中から，3問選択して解答しなさい．

問題 1

一様な重力のもとでの粒子の運動を考える．粒子には速度に比例した空気の抵抗が作用し，単位質量あたりの比例係数が γ である．図1のように，水平方向に x 軸，鉛直上方に y 軸をとる．時間 $t=0$ での粒子の座標は $x=0$ および $y=0$ であり，速度の x 成分は $v_0\cos\theta$, y 成分は $v_0\sin\theta$ とする．ただし，$v_0>0$ および $0<\theta<\pi/2$ である．重力加速度を g とすると，x および y の時間変化は次の微分方程式によって記述される．

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -g-\gamma\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(ii)}$$

以下の問に答えよ．

(1) $\gamma=0$ のとき，$t>0$ で $y=0$ となる時間を求めよ．

以下，$\gamma\neq0$ とする．

(2) 一般に抵抗力は粒子の速度の関数となるが，粒子の速度が小さいとき，抵抗力は速度に比例すると近似できる．その理由を簡潔に説明せよ．

(3) 微分方程式 (i) および (ii) を解いて，時間 $t>0$ での x および y の式を求めよ．

(4) x-y 平面上で粒子が描く曲線の式を求めよ．

(5) 粒子の y 座標が最大となる時間 t_{max} を求めよ．また，γ が小さいとして1次の補正項を求め，$\gamma=0$ の場合と比較して t_{max} がどのように変化するかを説明せよ．

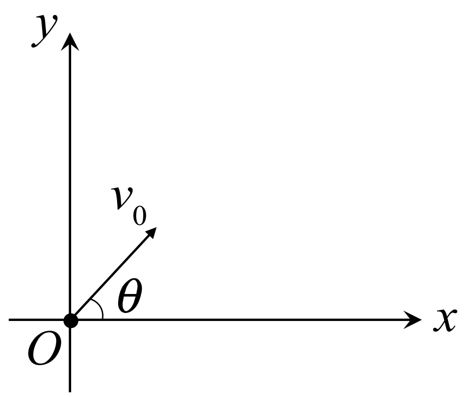

図 1

問題 2

点 $\boldsymbol{r}$ における電束密度ベクトルを $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$，電荷密度を $\rho = \rho(\boldsymbol{r})$ とするとガウスの法則は次式で与えられる．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{i}$$

また，真空の誘電率を $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F m^{-1} とする．以下の問に答えよ．

(1) 半径 R の導体球に電荷 Q を与えたとき，球の中心から距離 $r(> R)$ の点における電束密度ベクトルを求めよ．

(2) 無限遠での電位を 0 として，導体球の中心から距離 $r(> R)$ の点における電位を求め，この導体球の静電容量を求めよ．

(3) 地球を半径 6400 km の導体球とみなしたとき，その静電容量を有効数字 2 桁で求めよ．

(4) 図 2 の左側に示したように，面積 S の平行板コンデンサーの 2 枚の極板にそれぞれ電荷 Q_1 と電荷 Q_2 を帯電させる．極板は十分大きく，極板の端の影響は無視できるとする．それぞれの極板の表面（内側の面と外側の面）に現れる表面電荷密度を，重ね合わせの原理を用いて求めよ．

(5) 面積 S の導体板を図 2 の右側に示したように平行に配置して，導線でつなぎ電圧をかける．隣り合う導体板間の距離はすべて等しく d とする．このような構造をもつ積層コンデンサーにおいて，導体板の枚数が n 枚のときの静電容量を求めよ．（図は $n = 5$ の場合である．）

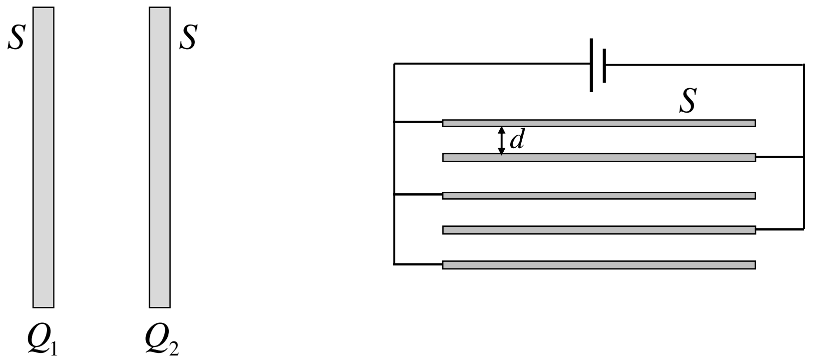

図 2

問題 3

空間座標を $\mathbf{r}=(x,y,z)$，原点からの距離を $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ として，球対称ポテンシャル $V(r)$ 中の質量 m の粒子を考える．プランク定数を h として $\hbar=\frac{h}{2\pi}$ とする．運動量演算子を $\mathbf{p}=(p_x,p_y,p_z)=-\mathrm{i}\hbar\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ とすると，この粒子を記述するハミルトニアンは次式で与えられる．

$$H=\frac{1}{2m}\mathbf{p}^2+V(r) \tag{i}$$

以下の問に答えよ．

(1) 角運動量演算子を $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ で定義する．このとき，次の交換関係が成り立つことを示せ．

$$[L_x,L_y]=\mathrm{i}\hbar L_z \tag{ii}$$

(2) ハミルトニアン H が L_z および $\mathbf{L}^2$ と可換であることを示し，その物理的な意味を説明せよ．

(3) $L_+=L_x+\mathrm{i}L_y$ を定義する．L_z の固有状態を考え，その固有値は負とする．このとき，この固有状態に L_+ を作用させると，どのような状態が生成するかを説明せよ．

3 次元の極座標 $x=r\sin\theta\cos\phi$, $y=r\sin\theta\sin\phi$, $z=r\cos\theta$ を用いると，L_z および L_+ はそれぞれ以下の式で表される．

$$L_z=-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{iii}$$

$$L_+=\mathrm{i}\hbar\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\left(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\theta}+\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \tag{iv}$$

(4) 波動関数 $\psi(r,\theta,\phi)=f(r)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\sin\theta$ がこの系の固有状態のとき，ある正の整数 n において $L_+^n\psi(r,\theta,\phi)=0$ となる．n を求めよ．また，この n において $L_+^n\psi(r,\theta,\phi)=0$ となることの物理的な意味を説明せよ．

問題 4

N 個の格子点からなる系を考える．各格子点には質量 m の粒子が角振動数 ω の調和振動子ポテンシャルで束縛されており，j 番目の格子点に束縛されている粒子の座標を $\mathbf{r}_j = (x_j, y_j, z_j)$，運動量を $\mathbf{p}_j = (p_{jx}, p_{jy}, p_{jz})$ とすると，ハミルトニアンは次式で与えられる．

$$H = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{2m} \mathbf{p}_j^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 \mathbf{r}_j^2 \right) \tag{i}$$

系は温度 T の巨大な熱浴に接しており，正準分布が適用できるとして，物理量 A の期待値を $\langle A \rangle$ で表す．以下の問に答えよ．

(1) 粒子を古典粒子として記述するとき，次式で与えられる分配関数を求めよ．

$$Z = \frac{1}{h^{3N}} \int \prod_{j=1}^{N} [dp_{jx} dp_{jy} dp_{jz}] \int \prod_{j=1}^{N} [dx_j dy_j dz_j] \exp(-\beta H) \tag{ii}$$

ただし，k_B をボルツマン定数として $\beta = \dfrac{1}{k_\mathrm{B} T}$ であり，h はプランク定数とする．また，$a > 0$ のときに成り立つ次の積分公式を用いてよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-ax^2\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{iii}$$

(2) この系の熱容量を求めよ．

(3) $\left\langle p_{jx}^2 \right\rangle$ を求めよ．

粒子を量子力学に従う粒子として記述すると，ハミルトニアンは次式で与えられる．

$$H = \sum_{j=1}^{N} \hbar\omega \left(n_{jx} + n_{jy} + n_{jz} + \frac{3}{2} \right) \tag{iv}$$

ただし，n_{jx},n_{jy},n_{jz} は非負の整数で，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ である．

(4) 分配関数を求めよ．

(5) 熱容量を求め，低温および高温でそれぞれどのような値に近づくかを説明せよ．